Peter Jansen

Sprachförderung in Verbindung mit Veranschaulichung und Handeln

auf dem Stand vom 11.05.2017

Denken und Sprechen in der Zone der nächsten Entwicklung

L.S.Vygotskij hat in Langzeitstudien die Sprachentwicklung von Kindern untersucht. Er weist nach, dass das selbstvergessene Sprechen kleiner Kinder nicht, wie Piaget meinte, Ausdruck einer egozentrischen Entwicklungsstufe ist, sondern eine Form des lauten Denkens. So bedingen sich Denken und Sprechen gegenseitig.
Gegen den Versuch Piagets, die kognitive Entwicklung des Kindes in Entwicklungsstufen zu beschreiben, wendet Vygotskij ein, dass diese Entwicklung in hohem Maße durch die Umwelt beeinflusst ist und keineswegs als ein von Einflüssen unabhängiger Prozess dargestellt werden kann. Die Umwelt beeinflusst das Denken des Kindes vor allem durch Sprache.

Es kommt demzufolge nicht darauf an, was ein Kind aufgrund seiner „biologischen" Entwicklung kann, sondern, was das Kind mit Hilfe eines Lehrers (im weitesten Sinne) zu leisten im Stande ist. Das nennt Vygotskij die Zone der nächsten Entwicklung.

Beim Aufbau mathematischer Verständnisgrundlagen gilt es zunächst, die Symbolsprache der Mathematik zu lernen. Dazu gehören die Zahlwortreihe, die Operationszeichen, Vergleichsbegriffe wie größer und kleiner, und vieles mehr. Natürlich ist es wenig ergiebig, solche Begriffe nur nachzusprechen zu lassen. Vielmehr soll das Kind die neue Fachsprache mit Vorstellungsbildern und Handlungen verbinden. Dabei hilft ein ständiger Wechsel zwischen den Darstellungsformen (beziehungsreiches Üben).

Auf keinen Fall soll der Eindruck entstehen, bei Veranschaulichungsmaterial bzw. Handlung, bei der Symbolsprache der Rechenaufgabe und der verbalen Beschreibung handele es sich um voneinander unabhängige Darstellungen. Diese Ansicht ist bei schwachen Rechnern zu beobachten, die z.B. meinen, eine Aufgabe könne zu unterschiedlichen Ergebnissen führen, je nachdem, ob man sie mit Plättchen oder mit Zahlen ausrechnet. Viele Kinder haben auch nur sehr einseitge Vorstellungen davon, welche Handlungen einer Plus- oder Minusaufgabe zugrunde liegen kann. Im Sinne Vygotskijs müssten wir also herausfinden, welche Zahl- und Operationsvorstellung das Kind bereits aufgebaut hat und Hilfen anbieten, die ein Stück weiterhelfen. Sprache hat dabei vor allem die Aufgabe, dem Kind Denkwerkzeuge anzubieten, mit denen Vorstellungen und Handlungen beschrieben werden können, die an das Vorwissen des Kindes anknüpfen.

Nach breiten empirischen Untersuchungen in den Aktionsforschungsprojekten Basiskurs Mathematik und Matinko (Jansen 2005, 2010) wissen wir

- dass Aufgaben, die auf einer relationalen Zahlverwendung beruhen, von deutlich weniger Kindern gelöst werden als Aufgaben, die ordinale oder kardinale Zahlvorstellungen voraussetzen,
- dass sich schwache Rechner vor allem durch die relationale Zahlverwendung von den übrigen Kindern unterscheiden,
- dass so gut wie alle Kinder, die relationale Aufgaben lösen, auch kardinale Aufgaben lösen und dass so gut wie alle Kinder, die kardinale Aufgaben lösen, auch ordinale Aufgaben lösen,
- dass es sich bei den Zahlverwendungsarten um signifikant aufeinander aufbauende Kompetenzstufen handelt,
- dass neben den empirischen Unterschungen auch sachlogische Erwägungen den Lernweg von der ordinalen zur kardinalen zur relationalen Zahlverwendung erklären,
- dass eine Förderung, die sich an diesem Lernweg orientiert, effektive Lerneffekte bewirkt.

Deshalb ist es erst dann sinnvoll, Zahlen auch abstrakt im Sinne von Zahlbeziehungen zu üben, wenn das Kind ordinale und kardinale Zahl- und Operationsvorstellungen bereits aufgebaut hat. Unter dieser Voraussetzung sind solche Übungen allerdings auch dringend geboten, um dem Kind zu helfen, sich von allzu konkreten Mengenvorstellungen zu lösen.

In den folgenden Seiten soll anhand von Beispielen demonstriert werden, wo Probleme einer Sprachförderung zu verorten sind, die nicht in der Zone der nächsten Entwicklung anknüpfen. Anschließend wird skizziert, wie eine Alternative aussieht, die Sprache in Verbindung mit Vorstellungen und Handlungen fördert.

„Schöne" Päckchen?

Der Aufbau einer Addition
wird beispielsweise wie folgt erklärt:
Bei der Aufgabe 5 + 3 = 8
ist 5 die erste Zahl.
Die 3 ist die zweite Zahl
und die 8 ist das Ergebnis.

erste Zahl		zweite Zahl		Summe
5	+	3	=	8

Was fällt dir auf? Begründe!

7	+	4	=	11
9	+	4	=	13
11	+	4	=	15
13	+	4	=	17

Ein „schönes Päckchen" sieht dann zum Beispiel so aus wie rechts abgebildet. Viele Kinder nutzen die Beziehungen zwischen den Aufgaben als Rechenhilfe und entwickeln Freude am Entdecken der Zusammenhänge. Wenn man sieht, dass die erste Zahl immer um 2 größer wird und weiß, dass das Ergebnis dann auch um 2 größer werden muss, braucht man nicht jede Aufgabe einzeln zu lösen. Viele Kinder sehen bei „schönen Päckchen" die Zahlbeziehungen aber nicht und lösen jede Aufgabe einzeln. Das ist mühsam und alles andere als „schön".

			gleich			
	7	+	4	=	11	
+2	9	+	4	=	13	+2
+2	11	+	4	=	15	+2
+2	13	+	4	=	17	+2

Damit Kinder auf die Beziehungen zwischen den Aufgaben aufmerksam werden, ist es sinnvoll, durch Bögen, Pfeile, Umrandungen, Farben und Beschriftungen deutlich zu machen, was sich wie verändert und was gleich bleibt. Dadurch werden Beziehungen zwischen Zahlen veranschaulicht, allerdings nicht die Handlung, die dem Addieren zugrundeliegt. Kinder, die noch keine tragfähige Vorstellung entwickelt haben, was Addieren bedeutet, kommen auch mit Forschermitteln nur sehr bedingt weiter. Sie werden eben nicht in der Zone der nächsten Entwicklung abgeholt.

Nun erhält das Kind Mona auch noch den Auftrag, etwas dazu aufzuschreiben: „Was fällt dir auf? Begründe!" Ohne weitere Hilfe kann Mona kaum wissen, was denn eigentlich mit solch einem Doppelauftrag gemeint ist. Sie würde dann zu den vielen Kindern gehören, die rudimentäre Stichworte und mathematisch wie grammatikalisch und orthografisch höchst fragwürdige Sprachfragmente notieren. Zu deren Qualität ist in der Regel weder eine Rückmeldung, geschweige denn eine Korrektur und Überarbeitung vorgesehen.

Damit Kinder die Veränderungen in einem „schönen Päckchen" auch verbal beschreiben können, werden sprachliche Hilfen in Form von Wortspeichern und Satzmustern angeboten. Diese sprachlichen Hilfen sollen im Sinne eines Scaffolding wie ein Baugerüst zunächst unterstützen, dann aber nach und nach abgebaut werden bis die Kinder im freien Ausdruck ähnliche Formulierungen benutzen können. Das Baugerüst kann z.B. so aussehen:

Beschreibe wie sich die Veränderung auf die Summe auswirkt.
Benutze dafür dieses Satzmuster:

Wenn ich die erste Zahl	gleich lasse um ... vergrößere um ... verkleinere
und die zweite Zahl	gleich lasse, um ... vergrößere, um ... verkleinere,
dann	bleibt die Summe gleich. vergrößert sich die Summe um ... verkleinert sich die Summe um ...

Nehmen wir an, durch regelmäßige und aufwändige Übung lernt Mona, den Zusammenhang in einem Konditionalsatz zu beschreiben:
„Was fällt dir auf? Wenn ich die erste Zahl um 2 vergrößere und die zweite Zahl gleich lasse, dann vergrößert sich die Summe um 2.
Begründe! Die Summe wird um 2 größer, weil die erste Zahl um 2 größer wird."

Aber ist das die erwartete perfekte Lösung der Aufgabe?

Worthülsentraining?

In den Ohren eines Kindes, das sich Zahlen einseitg ordinal als eine Art Hausnummer vorstellt, klingt der Konditionalsatz vielleicht so: „Wenn ich die erste Hausnummer um 2 vergrößere, und die zweite Hausnummer gleich lasse, dann vergrößert sich die Summe um 2.“ Das ergibt für das Kind beim besten Willen keinen Sinn; denn eine Hausnummer steht immer nur für EIN Haus, auch wenn dieses EINE Haus irgendwie größer wird.
Wenn es dann für die Anwendung des Sprachmusters auch noch positive Rückmeldung gibt, wird dem Kind die Mathematik eher rätselhafter als verständlich. De facto lernt das Kind, dass es sich auf die Kraft des eigenen Denkens besser nicht verlässt.

Im gleichschrittigen Klassenunterricht können derartige Schwierigkeiten in der Regel nicht gelöst werden. Schwache Rechner sollen dann „in Anforderungsbereich 1“ (Reproduzieren) arbeiten. Der Anspruch wird darauf reduziert, dass das Kind die Aufgaben des Päckchens ausrechnet. Weil es dabei nur um die Richtigkeit der Lösung geht und strategische Hilfen nicht vorgesehen sind, arbeitet das Kind genau in der Rechenstrategie, in der es gewohnt ist zu arbeiten. Bei schwachen Rechnern bedeutet das, dass sie nicht tragfähige Strategien wie „alles zählen“ oder Zählfehler um Eins noch weiter verfestigen.

Nun hat aber Mona alle Zahlbeziehungen erkannt und formuliert sogar eine „Begründung“: „Die Summe wird um 2 größer, WEIL die erste Zahl um 2 größer wird.“ Eine um Sprachförderung bemühte Lehrkraft wird sich über den „tollen Fortschritt“ freuen, den das Kind gemacht hat. Dabei sagt die neu erworbene Formulierungskunst des Kindes noch nichts darüber aus, ob das Kind auch verstanden hat, was es da sagt. Schließlich könnte das Kind das beobachtete Phänomen im Sinne von „vorne mehr - hinten mehr“ interpretieren und auf Aufgaben übertragen wie 5 = 8 - 3, also 7 = 8 - 5. Das Beispiel ist konstruiert, aber man sieht, dass die „tolle Begründung“ genau genommen überhaupt keine Ursache aufzeigt, sondern ein Phänomens beschreibt, vielleicht auch einen Zusammenhang, aber eben keinen Kausalzusammenhang.

Und warum soll denn überhaupt so etwas als Fließtext aufgeschrieben werden? Mathematiker würden den Zusammenhang doch wohl eher so begründen: Wenn $a+b=c$, dann $(a+2)+b=(c+2)$
Mathematische Zusammenhänge im Fließtext sauber zu formulieren, ist auch für Erwachsene sehr schwierig und deutlich umständlicher und missverständlicher als die Formelsprache der Mathematik.
Es genügt doch vollkommen, wenn Kinder die Zusammenhänge mit deiktischen Mitteln (Pfeilen, Bögen, Farben oder Worten wie „hier“ und „da“) zeigen können. Hauptsache ist doch, dass sie die Zusammenhänge als Rechenhilfe nutzen und z.B. das Päckchen fortsetzen können.
Und wenn Kinder etwas aufschreiben wie „wen Die este Zal um 1 gros wird, ...“ soll dann wirklich auf jede sprachliche, grammatikalische und orthografische Korrektur verzichtet werden, womöglich auch noch in „veröffentlichten“ Plakaten? Man soll es ja sicher nicht übertreiben, aber Kinder sollten auch nicht lernen, dass sprachliche Konventionen irrelevant wären. Einige Kinder können solche Beschreibungen sicher leisten und für diese Kinder ist es sicherlich auch hilfreich, Konditionalsätze schriftlich und mit Überarbeitung zu üben. Als grundlegende Anforderung für alle Kinder ist solche Verschriftlichung sicherlich überzogen.

Fazit:
Sprachliche Unterstützung, die nicht mit Veranschaulichung und Handlung verbunden ist, steht in der Gefahr, zu einem reinen Training von Worthülsen und leeren Floskeln zu werden.
Leere Floskeln, die ohne Verständnis benutzt werden sollen, greifen das Vertrauen des Kindes in die Kraft des eigenen Denkens an.
Die Verwendung ausgefeilter Sprachmuster zeugt nicht zwangsläufig von Verständnis.
Eine „Begründung“, die sich nur an Zahlsymbolen orientiert, ist wenig tragfähig.
Schriftsprachliche Beschreibungen mathematischer Zusammenhänge stellen eine zusätzliche Anforderung dar, die nur einigen Kindern abverlangt werden sollte.

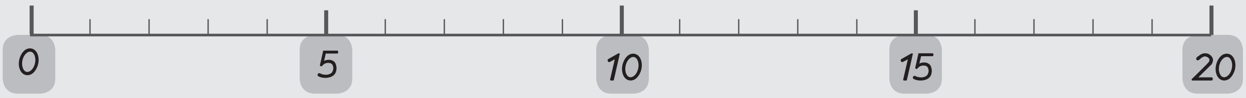
Als Alternative soll nun skizziert werden, wie eine alternative Sprachförderung aussieht, die in Verbindung mit Veranschaulichung und Handlung steht.

Aufgaben am Zahlenstrahl verändern

Kleine Schritte rückwärts | 2

aus: Matinko Arbeitsheft 2

Zeige die Schritte am Zahlenstrahl.
Schreibe die vollständige Rechnung auf.



1	0	–	1	=		
1	0	–	2	=		
1	0	–	3	=		
1	0	–	4	=		

1	1	–	1	=		
1	2	–	2	=		
1	3	–	3	=		
1	4	–	4	=		

1	4	–	2	=		
1	3	–	2	=		
1	2	–	2	=		
1	1	–	2	=		

1	3	–	3	=		
1	3	–	2	=		
1	3	–	1	=		
1	3	–	0	=		

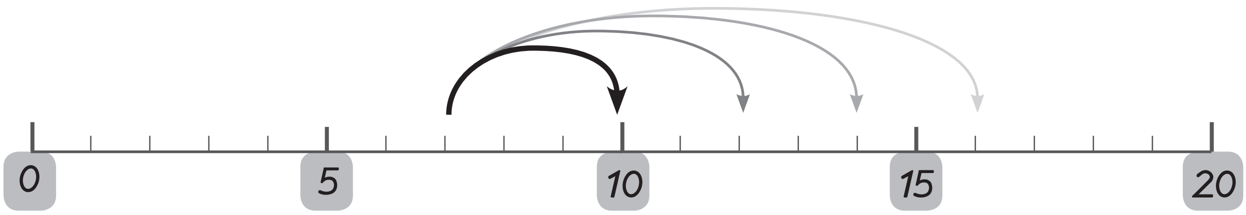
Kinder lernen, dass sich die Handlung „von der 10 aus zwei Schritte rückwärts gehen" am Zahlenstrahl zeigen und durch die Aufgabe 10 - 2 = 8 darstellen lässt.

Wenn Kinder die innerhalb des Päckchens veränderten Aufgaben am Zahlenstrahl zeigen, wird durch die Handlung klar,

- dass z.B. im ersten Päckchen die „Startzahl" gleich bleibt, denn ich zeige immer auf die selbe Startzahl,
- dass die Zahl der Schritte zunimmt, denn ich zeige unterschiedlich viele Schritte,
- dass das „Ergebnis" weiter links steht.

Für den Aufbau mathematischer Verständnisgrundlagen genügt es, die symbolische Darstellung der Aufgabe in eine Handlung umsetzen zu können und umgekehrt. Dafür sind handlungsbegleitende sprachliche Unterstützungen notwendig wie „Startzahl", „Schritte", „links", „rechts", „minus", „plus", „Zielzahl".

Für Kinder, die Zahlen bereits als Zahlbeziehung verwenden können, bietet sich folgende Zusatzaufgabe an, die Begründungen durch Verweise auf die Veranschaulichung ermöglicht.



Vergrößere den Bogen um 2.

	7	+	3	=	1	0	
							+ 2
	7	+	5	=	1	2	
							+ 2
	7	+	7	=	1	4	
							+ 2
	7	+	9	=	1	6	

Mengen verändern

Mengen in der Vorstellung verändern | 2

aus: Matinko Arbeitsheft 3

Zeichne die Menge und verändere sie in der Vorstellung.

Beispiel

17		17 + 1 = 18	17 – 2 = 15	17 – 5 = 12
19		19 + 1 =	19 – 9 =	19 – 5 =
18		18 + 2 =	18 – 3 =	18 – 5 =
16		16 + 3 =	16 – 10 =	16 – 5 =

Kinder lernen, dass sich die Handlung „Die 17 mit Systemblöcken legen und den Fünferstab wegnehmen“ durch die Aufgabe 17 – 5 = 12 darstellen lässt und umgekehrt.

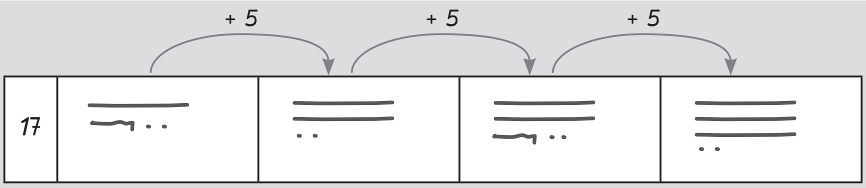
Wenn Kinder ähnliche Aufgaben mit Systemblöcken durchführen, wird durch die Handlung klar,

- dass die „erste Rechenzahl“ gleich bleibt, denn ich lege immer die selbe Menge,
- dass die „zweite Rechenzahl“ sich verändert, je nachdem, wie viele ich wegnehme,
- dass sich natürlich auch „das Ergebnis“ ändert, je nachdem, wie viele ich wegnehme.

Für den Aufbau mathematischer Verständnisgrundlagen genügt es, die symbolische Darstellung der Aufgabe in eine Handlung umsetzen zu können und umgekehrt. Dafür sind sprachliche Unterstützungen notwendig wie „Zehner“, „Fünfer“, „wegnehmen“, „hinzufügen“, „minus“, „plus“.

Bei solch einem Transfer von der Zahl zur Veranschaulichung handelt es sich im Sinne der Bildungsstandards um Anforderungsbereich 3. Eine Reduzierung der Arbeit schwacher Rechner auf Anforderungsbereich 1 (Reproduzieren), würde Kindern abverlangen, ohne jedes Verständnis rein schematisch zu üben.

Für Kinder, die Zahlen bereits als Zahlbeziehung verwenden können, bieten sich Eigenproduktionen nach folgendem Schema als Zusatzaufgabe an. So werden Begründungen durch Verweise auf die Veranschaulichung ermöglicht.



1	7	+	5	=	2	2
2	2	+	5	=	2	7
2	7	+	5	=	3	2

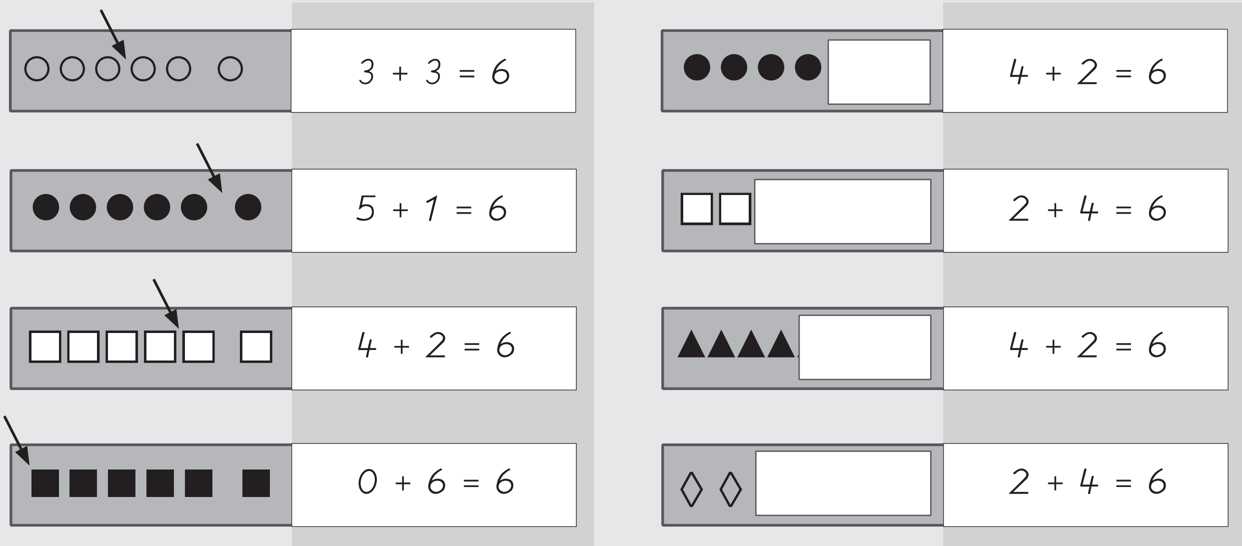
Zeichne die Menge und verändere sie.

Mengen zerlegen als Handlung

Zerlegen der 6 | 1

aus: Matinko Arbeitsheft 3

Übe die Zerlegungen, bis du sie schnell kannst.



Kinder lernen, dass sich die Handlung „Zerlege die Menge 6 mit deiner Bleistiftspitze in zwei Teile“ durch eine Aufgabe wie 2 + 4 = 6 darstellen lässt und umgekehrt.
Wenn Kinder ähnliche Zerlegungsaufgaben durchführen, wird durch die Handlung klar,

- dass „das Ergebnis“ gleich bleibt, denn ich lege immer die selbe Menge,
- dass sich „die erste“ und „die zweite Rechenzahl“ gegensinnig verändern, je nachdem, wohin ich mit der Bleistiftspitze zeige.

Für den Aufbau mathematischer Verständnisgrundlagen genügt es, die symbolische Darstellung der Aufgabe in eine Handlung umsetzen zu können und umgekehrt. Dafür sind sprachliche Unterstützungen notwendig wie „zerlegen“, „der linke Teil“, „der rechte Teil“, „das Ganze“, „minus“, „plus“. Allerdings sollte der Transfer von der Veranschaulichung zur Zahl bzw. zur Aufgabe auch auf Tempo geübt werden.

Dass der rechte Teil um so größer ist, je kleiner der linke Teil ist, ist eine schon fast banale Feststellung, wenn ich die Rechnung als Handlung durchführe. Satzkonstruktionen wie „Wenn das Ergebnis gleich bleibt und ich die erste Rechenzahl um eins erhöhe, dann wird die zweite Rechenzahl um 1 kleiner“ würden hier eher die Verwirrung als das Verständnis fördern.

Abstrakte relationale Formulierungen wie „immer 2 mehr“ sind für Kinder mit einer kardinal geprägten Zahlvorstellung nur in Verbindung mit der konkreten Mengendarstellung zu verstehen, wenn man also konkret zeigen kann, wo man die „2 mehr“ auch sieht. Um eine solche abstrakte Vorstellung aufzubauen, wird die Handlung allmählich durch eine vorgestellte Handlung ersetzt. In der rechten Spalte ist deshalb der rechte Teil verdeckt. In einem dritten Übungsschritt wird die Zerlegung ohne Abbildungen nur noch mit Zahlsymbolen geübt.

Kinder können auch selber Päckchen nach dem nebenstehenden Schema erfinden. Begründungen sind dann durch Verweise auf die Veranschaulichung möglich.

Verschiebe den Pfeil immer um 2 nach rechts.

	2	+	6	=		8
	4	+	4	=		8
	6	+	2	=		8
	8	+	0	=		8

Vier Aufgaben | 1

aus: Matinko Arbeitsheft 3

Zu jeder Rechentafel kannst du
vier Aufgaben bilden. Wie heißen sie?

5	
3	2

3 + 2 = 5
2 + 3 = 5
5 − 2 = 3
5 − 3 = 2

18	
6	12

6 + 12 = 18
12 + 6 = 18
18 − 12 = 6
18 − 6 = 12

An der Rechentafel liegt bzw. steht oben das Ganze, unten die Teile.
Kinder lernen, dass man die Handlung „Füge beide Teile nach oben zu einem Ganzen zusammen" „addieren" nennt und dass sie sich durch Aufgaben wie 3 + 2 = 5 darstellen lässt. Umgekehrt lässt sich die Aufgabe 3 + 2 = 5 in eine Handlung (Zusammenfügen) umsetzen.
Kinder lernen, dass man die Handlung „Zerlege das Ganze in Teile" „subtrahieren" nennt und dass sie sich durch Aufgaben wie 5 – 2 = 3 darstellen lässt.

- Addition und Subtraktion sind wie Zusammenfügen und Zerlegen inversive Operationen.
- Das Pluszeichen steht immer zwischen den Teilen.
- Das Minuszeichen steht immer hinter dem Ganzen.
- Aus einer Rechentafel mit den Zahlen 5 (oben) 3 und 2 (unten) lassen sich vier Aufgaben bilden.

Wenn Kinder ähnliche Aufgaben durchführen, wird durch die Handlung klar,

- dass man Zahlen aus anderen Zahlen zusammenfügen kann, bzw. Zahlen in andere Zahlen zerlegen.
- dass Addieren nicht immer „hinzufügen" bedeutet und dass es deshalb auch nicht immer ein „Ergebnis" im Sinne von „Endzustand" eines zeitlich sukzessiven (dynamischen) Vorgangs nach dem Schema „zuerst, dann, am Ende" gibt.
- dass es keine Auswirkungen auf das Ganze hat, wenn ich den linken und den rechten Teil bzw. „die erste" und „die zweite Rechenzahl" vertausche.

Für den Aufbau mathematischer Verständnisgrundlagen genügt es, die symbolische Darstellung der Aufgabe in eine Handlung umsetzen zu können und umgekehrt. Dafür sind sprachliche Unterstützungen notwendig wie „Rechentafel", „zusammenfügen", „zerlegen", „der linke Teil", „der rechte Teil", „das Ganze", „minus", „plus".

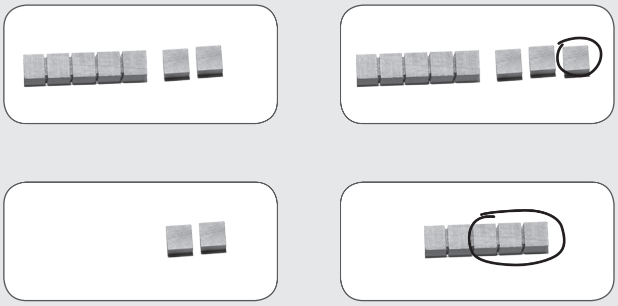
Abstrakte relationale Formulierungen wie „immer 2 mehr" sind für Kinder mit einer kardinal geprägten Zahlvorstellung nur in Verbindung mit der konkreten Mengendarstellung zu verstehen, wenn man also konkret zeigen kann, wo man die „2 mehr" auch sieht. Um eine abstrakte relationale Vorstellung allmählich aufzubauen, wird die Handlung allmählich durch eine ikonische Darstellung oder vorgestellte Handlung und schließlich durch Zahlsymbole ersetzt.

Fachbegriff und Handlungsfolge

aus: Matinko Arbeitsheft 4

Unterschied | 1

Eine Menge hat etwas, was die andere nicht hat.
Das ist der Unterschied. Wie groß ist er?



Lösung:
Der Unterschied zwischen 7 und 8 ist 1.

Der Unterschied zwischen 2 und 5 ist 3.

Um Fachbegriffe wie „Unterschied“ zu verstehen, brauchen Kinder eine konkrete Handlungsanleitung. Kinder lernen, was sie konkret tun können, wenn sie nicht wissen, was der Unterschied zwischen zwei Zahlen ist. Mit Hilfe der Handlungsfolge kann das Kind die eigene Lösungssicherheit begründen (argumentieren).

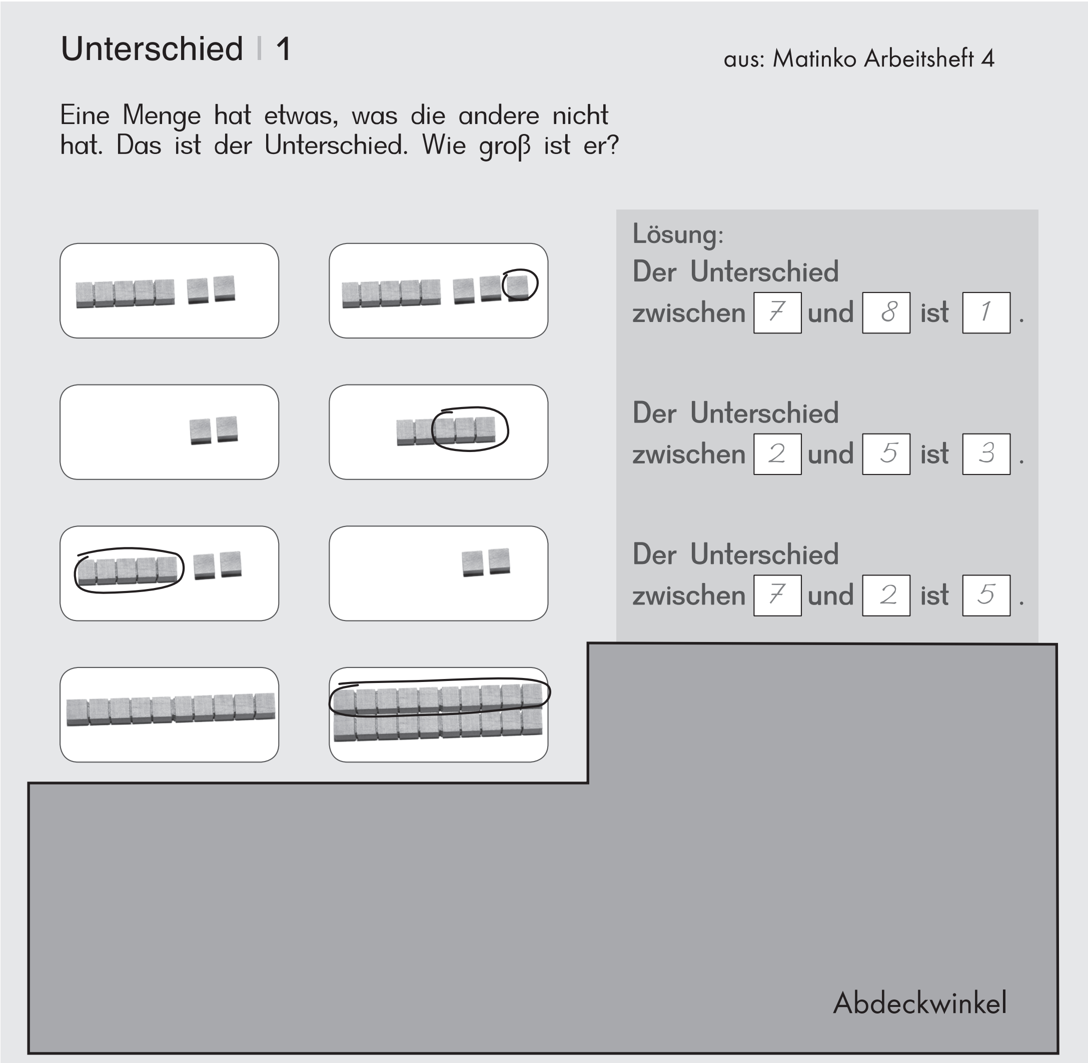
Weil sich gezeigt hat, dass Kinder den Unterschied zweier Zahlen oft nur in den Zahlsymbolen suchen (die 7 hat einen schrägen Rücken, die 8 hat zwei Kreise), hat sich folgende Handlungsfolge bewährt:
Stelle beide Zahlen als Menge dar. Kreise ein, was die eine Zahl hat, die andere aber nicht. Das ist der Unterschied. Finde heraus, wie groß der Unterschied ist, indem du herausfindest, wie viele du eingekreist hast.
(Alternativ: *Kreise ein, was bei beiden Mengen gleich ist. Der Rest ist der Unterschied.*)

Wenn Kinder ähnliche Aufgaben durchführen, wird durch die Handlung klar, dass der Unterschied nicht immer „das Ergebnis einer Minusaufgabe“ sein muss, sondern z.B. auch das sein kann, was man zu der einen Menge hinzufügen muss, um auf eine bestimmte Zielmenge zu kommen.

Für den Aufbau mathematischer Verständnisgrundlagen sollte das Kind den Fachbegriff in eine Handlung umsetzen können und umgekehrt die Handlung durch den Fachbegriff beschreiben können. Dafür sind sprachliche Unterstützungen notwendig wie „Menge“, „einkreisen“, „die größere Menge“, „die kleinere Menge“. In weiteren Übungsschritten wird erarbeitet, wie der Unterschied errechnet werden kann. Natürlich müssen Handlungsfolgen separat erklärt und eingeübt werden (z.B. beim täglichen Zehnminutenrechnen).

Das gilt auch für Begriffe wie „doppelt“. Hier geht es nicht nur darum, den Begriff selbst zu kennen, sondern auch Verdoppelungen für Ableitungsstrategien (7+8=7+7+1) zu nutzen. Begriffe sind eben nicht nur schnell zu erlernende Worthülsen, sondern Denkwerkzeuge, die dazu dienen, Handlungen besser beschreiben und Strukturen besser nutzen zu können. Auch die flexible Nutzung des Denkwerkzeugs bedarf separater Übung mit und ohne den Zusammenhang komplexer Aufgaben.

Tempoübungen

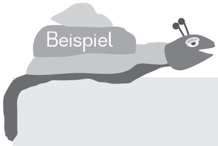


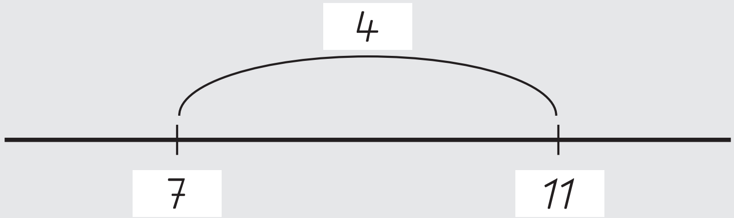
Alle Veranschaulichungern sind missverständlich und können im Prinzip auch kontraproduktiv genutzt werden. Deshalb genügt es nicht, der Rechenaufgabe eine Abbildung hinzuzufügen. Tragfähig ist die Nutzung einer Rechenstrategie erst dann, wenn sich erstens das Kind selber sicher ist, dass die Lösung stimmt und zweitens die Lösung schnell und bequem finden lässt. Wenn es lange dauert, ist das ein Hinweis darauf, dass der Lösungsweg nichts taugt, bzw. dass die Veranschaulichung nicht wie vorgesehen genutzt wird (z.B. indem jedes Element einzeln gezählt wird).

Die Verbindung von Fachbegriff und Veranschaulichung sollte deshalb auch auf Tempo geübt werden. Veranschaulichung und Fachbegriff stehen nebeneinander. Mit dem Abdeckwinkel wird die Beschreibung zugedeckt, die Veranschaulichung ist zu sehen. Das Kind spricht die zur Veranschaulichung passende Verbalisierung und kontrolliert anschließend, indem es den Abdeckwinkel zur Seite schiebt. So ist eine hohe Übungsfrequenz gewährleistet.
Nach jedem Arbeitsheft gibt es eine Lernzielkontrolle. Wer es noch nicht verstanden hat, bleibt noch eine Weile beim Thema. So baut jedes Kind im eigenen Tempo Verständnis auf.

Ganz anders geht es beim gleichschrittigen durchnehmenden Unterricht zu. Es bleibt keine Zeit für gründliche Übung, wenn das Kind eben etwas länger braucht als der Durchschnitt der Klasse. Kaum ist das eine unverstandene Thema durchgenommen, geht es schon zum nächsten wieder unverstandenen Thema. Für Schüler mit besonderem Förderbedarf fehlt dabei der rote Faden. Inklusion darf ja nicht bedeuten, dass manche Kinder dauerhaft irgendwie reproduzierend (Anforderungsbereich 1) beschäftigt sind, ohne Zusammenhänge zwischen Symbol und Veranschaulichung herzustellen (Anforderungsbereich 2), ohne jede Transferleistung (Anforderungsbereich 3) und ohne etwas zu verstehen. Förderkinder haben auch im inklusiven Unterricht ein Anrecht auf systematische Förderung von Verständnis.

Plusaufgaben verändern

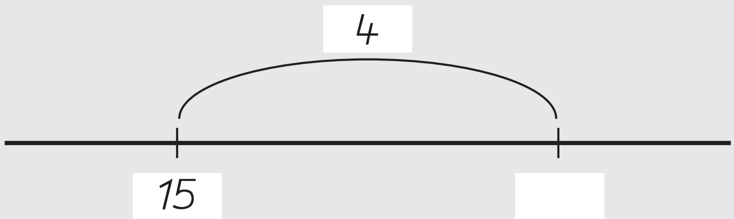




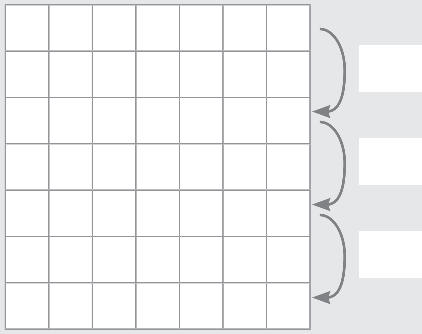
Verschiebe den Bogen immer um 2 nach rechts.

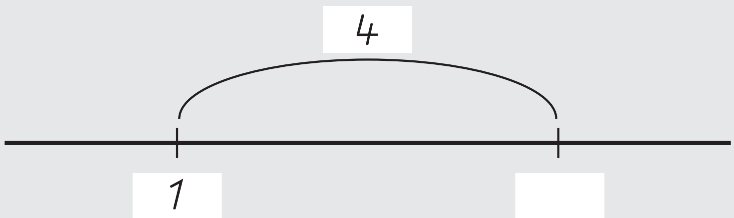
	7	+	4	=	1	1
	9	+	4	=	1	3
1	1	+	4	=	1	5
1	3	+	4	=	1	7

+ 2
+ 2
+ 2

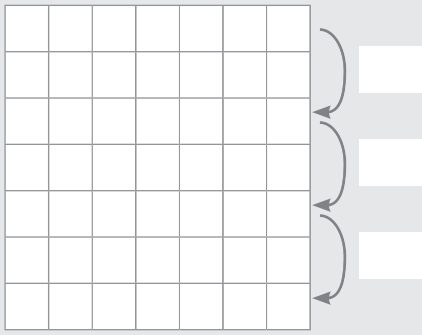


Verschiebe den Bogen immer um 1 nach links.





Lasse die kleinere Zahl gleich.
Vergrößere den Bogen immer um 1.

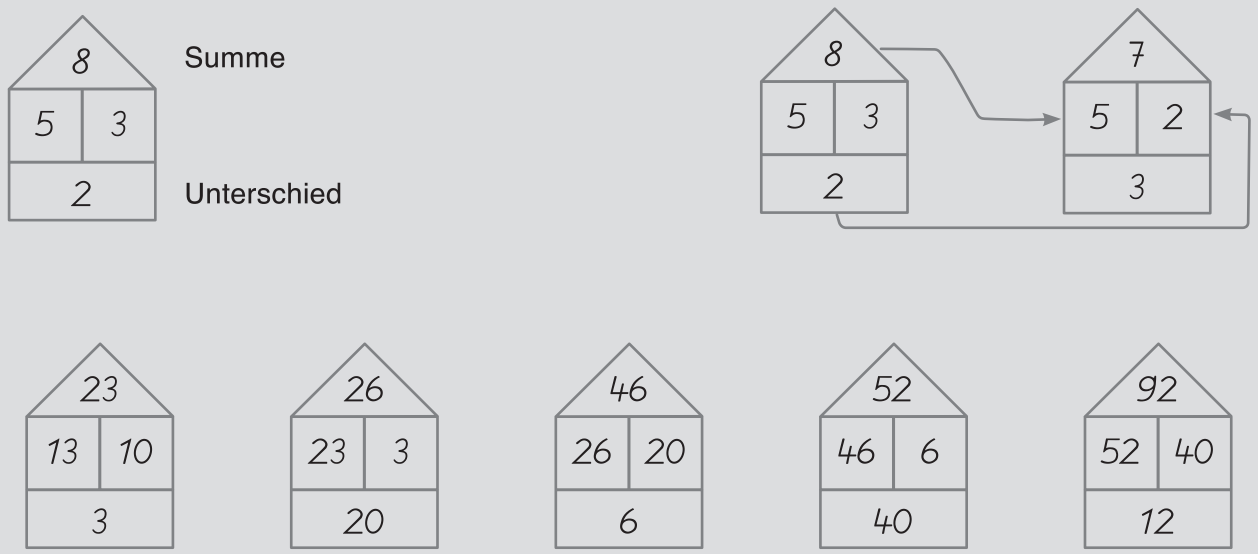


Zahlbeziehungen werden am besten am leeren Zahlenstrahl dargestellt. Eine linke, kleinere Zahl und eine rechte, größere Zahl stehen in einer Beziehung. Diese Zahlbeziehung wird durch einen Bogen dargestellt. Daran steht eine Zahl, die ausdrückt, wie groß der Unterschied beider Zahlen ist. Bei Plusaufgaben lässt sich die kleinere Zahl als Startzahl, die größere Zahl als Zielzahl interpretieren. Der Bogen zeigt, wie viel ich zu der kleineren Zahl hinzufügen muss, um die größere zu erreichen.
Wird der Bogen von Aufgabe zu Aufgabe verschoben, ändern sich Start- und Zielzahl gleichsinnig, aber der Bogen bleibt gleich.
Wird der Bogen bei gleichbleibender kleinerer Zahl vergrößert oder verkleinert, verändern sich Bogen und größere Zahl gleichsinnig.

Für den Aufbau mathematischer Verständnisgrundlagen ist in einem ersten Schritt schon viel erreicht, wenn Kinder die Darstellung am leeren Zahlenstrahl in die Darstellung einer Aufgabe umsetzen können und umgekehrt. Die Aufgabe, Veränderungen in einem Päckchen zu dokumentieren, erhalten sinnvollerweise nur die Kinder, die den ersten Schritt beherrschen. Es sind sprachliche Unterstützungen notwendig wie „kleinere Zahl“, „größere Zahl“, „Bogen“, „Bogenzahl“, „verschieben“, vergrößern“, „gleich lassen“.

Entdeckerfreude gemeinsam kultivieren

Zahlen ziehen um



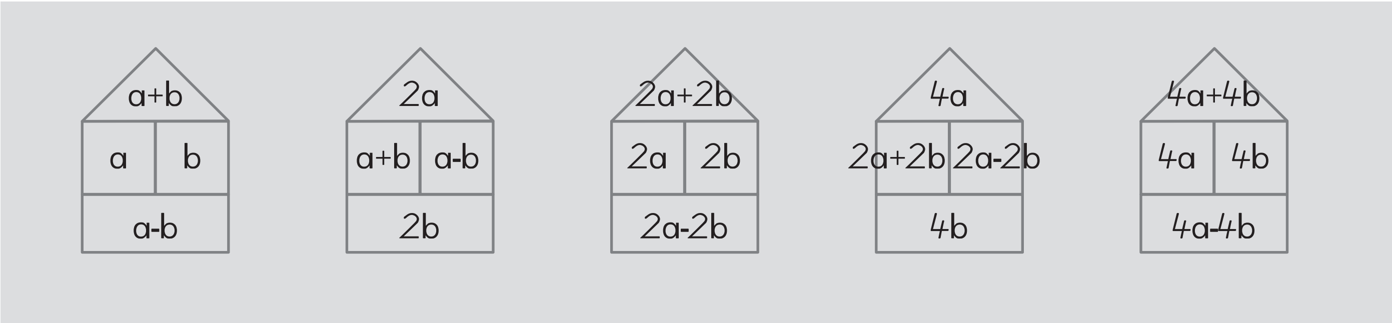
Im Übungsformat „Zahlen ziehen um" wohnen zwei Zahlen in den beiden Wohnungen eines Hauses. Die größere Zahl wohnt links, die kleinere rechts. Im Dach wohnt die Summe, im Keller der Unterschied. Alleine diese Erklärung strotzt vor mathematischen Fachbegriffen, die - wohlgemerkt nach gründlicher Erläuterung und Übung - hier im Kontext verwendet werden. Schwache Rechner können nun auf gemeinsam erarbeitete Veranschaulichungen zurückgreifen und in einzelnen Häusern Summe und Unterschied bilden. Für manche Kinder genügt es, nur die größere und die kleinere Zahl rechts oder links einzutragen und vielleicht noch zusätzlich die Summe zu bilden. Welche Aufgabe das Kind bekommt, hängt davon ab, was nach der Systematik des Förderplans (Drei-Säulen-Modell) in der Zone der nächsten Entwicklung ansteht.

Für Kinder, die die oben genannten Lernschritte beherrschen, kommt zusätzliche Komplexität ins Spiel. Die Summe zieht vom Dach in die linke Wohnung des Nachbarhauses, der Unterschied aus dem Keller in die rechte Wohnung des Nachbarhauses. So entsteht eine Straße von fünf Häusern. Die Kinder probieren solche Straßen aus, wobei die größte Zahl der Straße die 100 nicht überschreiten darf. Aber natürlich besteht ein besonderer Reiz darin, die 100 genau zu treffen.

Die Kinder werden angeregt, Zahlbeziehungen in ihren Straßen zu entdecken. Dafür wird Wortmaterial angeboten wie „die kleinste Zahl", die „größte Zahl", „um ... größer als", „ungerade Zahl", „doppelt so groß wie ..." usw. So verstehen auch schwächere Rechner, was denn hier eigentlich „entdeckt" werden soll. Nach und nach erschließt sich das „Geheimnis" der Straße: Die größte Zahl steht im Dach des letzten Hauses, hier und da ist etwas doppelt so groß wie da und dort, ja tatsächlich: ganze Häuser verdoppeln sich zum übernächsten Haus hin. Die Lehrkraft begeistert sich auch für kleine Entdeckungen. Kurzum: Entdeckerfreude wird gemeinsam entwickelt. So etwas geht nur durch das Lehrervorbild und nur in gemeinsamen Unterrichtsphasen. Und es geht sogar noch weiter: Wer die 100 genau treffen will, muss sie ins Dach des letzten Hauses schreiben. Wenn sich alles verdoppelt, muss im Dach des mittleren Hauses die 50 und im Dach des ersten Hauses die 25 stehen. Pfiffige Kinder können nun herausfinden, wie viele Möglichkeiten es gibt, die 100 genau zu treffen.

Ohne solche gemeinsame Phasen kann guter Mathematikunterricht nicht auskommen. Die Differenzierung ergibt sich in diesem Beispiel daraus, dass der Komplexitätsgrad der Anforderung erhöht wird. Aber auch schwache Rechner sind gefordert durch den Transfer zur Veranschaulichung Verständnis aufzubauen.

Begründen

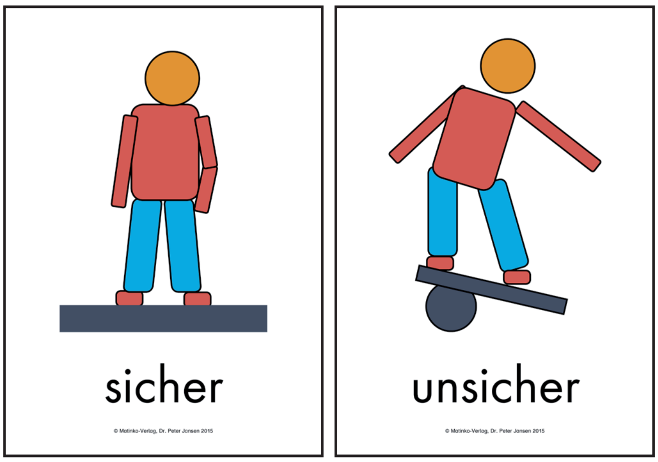


In manchen Veröffentlichungen wird der Doppelauftrag „Was fällt dir auf? Begründe!“ empfohlen. Nun lassen sich im Übungsformat „Zahlen ziehen um“ zwar viele Zusammenhänge beschreiben, eine Begründung ist aber erst machbar, wenn man wie oben abgebildet die Zahlen durch Variable ersetzt. Für Kinder ist es aber gar nicht notwendig, die Kausalzusammenhänge zu ergründen, um die Zahlbeziehungen für geschickte Lösungswege nutzen zu können. Vielmehr erfüllt das Übungsformat seinen Sinn, wenn Kinder Freude daran finden, gemeinsam dem Rätselhaften und Geheimnisvollen der Zusammenhänge ein wenig auf die Spur zu kommen.

Auch in unserem Beispiel des „schönen“ Päckchens stellte der Satz „Die Summe wird um 2 größer, weil die erste Zahl um 2 größer wird.“ keine kausale Begründung dar. Dagegen käme eine mit Gesten verbundene Erklärung wie „Wenn ich da zwei dazulege und das dann mit dem da zusammenfüge, landet das dort oben.“ der Ursache des Zusammenhangs sehr viel näher. Das ist aber keine Schriftsprache und so stellt sich die Frage, ob es überhaupt sinnvoll ist, allen Grundschülern abzuverlangen, Begründungen zu verschriftlichen.

Dagegen spricht:
- Gute Begründungen ergeben sich meistens erst aus dem Transfer zu Veranschaulichungen und Handlung.
- Dieser Transfer ist mit deiktischen Mitteln und ein paar Fachbegriffen besser darzustellen als durch Schriftsprache.
- Wenn es komplexer wird, sind Begründungen in der Formelsprache der Mathematik klarer als Schriftsprache.
- Der Aufwand ist enorm hoch: Inhaltlich müssen Kriterien dafür erarbeitet werden, was eine gute schriftsprachliche Begründung von einer weniger guten Begründung unterscheidet. Schriftsprache muss, zumindest, wenn sie veröffentlicht wird, hinsichtlich Grammatik und Rechtschreibung überarbeitet werden.

Vor allem aber ist zu fragen, wer denn eigentlich Adressat solcher Begründungen sein soll. Schreibt das Kind etwas für die Lehrkraft auf? Dem Mitschüler könnte man die Begründungen auch zeigend erklären. Das wäre allemal verständlicher als verschachtelte Satzkonstruktionen. Bevor ich anderen etwas erklären kann, muss ich aber zunächst einmal selber sicher sein, dass meine Lösung stimmt. Deshalb ist in mathematischen Zusammenhängen der wichtigste Adressat einer Begründung der Autor selbst. Für die eigene Lösungssicherheit genügt es vollkommen, in der Veranschaulichung zeigen zu können, wo man die verschiedenen Zahl- und Rechensymbole sieht.



aus. www.matinko.de/kontakt, downloads

Wir lassen Kinder anhand von Symbolkarten einschätzen, ob sie sich ihrer Lösung sicher sind oder ob sie sich selber unsicher fühlen. Wer sich sicher fühlt, soll begründen, was ihn sicher sein lässt. Das ist in aller Regel ein Verweis auf Veranschaulichung und Handlung bzw. auf eine verwandte Aufgabe, die sich wiederum durch solche Verweise begründen ließe. Kinder, die sich ihrer Lösung unsicher sind, lernen, was man tun kann, um sich der eigenen Lösung sicher sein zu können. Das ist der entscheidende Punkt, an dem sich Lernzuwachs entwickelt. In aller Regel hilft auch hier der sprachlich begleitete Transfer zu einer geeigneten Veranschaulichung weiter.